

Logika i Struktury Formalne – minimum

PRZEMYSŁAW SZCZEPANIAK

Informatyka Algorytmiczna

Wydział Informatyki i Telekomunikacji PWr

2026/2027

FAKTY PODSTAWOWE

Oto zestaw faktów z Logiki i Struktury Formalnych, które po tym kursie musisz dobrze znać wraz ze szkicami dowodów. Ponadto musisz umieć uzasadniać, że założenia w tych faktach są istotne.

Fakt 1. Podstawowe prawa rachunku zdań, np. prawo kontrapozycji.

Fakt 2. Podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów.

Fakt 3. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów $\forall^\infty$ i $\exists^\infty$.

Fakt 4. Podstawowe prawa rachunku zbiorów, np. prawa de Morgana.

Fakt 5. Jeśli f, g są relacjami, to $f \cup g$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy f, g są funkcjami oraz

$$f|_{\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)} = g|_{\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)}.$$

Fakt 6 (Składanie relacji).

$$\begin{aligned}(R \circ S) \circ T &= R \circ (S \circ T), \\ (R \circ S)^{-1} &= S^{-1} \circ T^{-1}.\end{aligned}$$

Fakt 7 (Działania na obrazach i przeciwobrazach zbiorów przez funkcje).

$$\begin{aligned}f[A \cup B] &= f[A] \cup f[B], \\ f[A \cap B] &\subseteq f[A] \cap f[B], \\ f^{-1}[A \cup B] &= f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B], \\ f^{-1}[A \cap B] &= f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].\end{aligned}$$

Fakt 8. Istnieje wzajemna odpowiedniość między relacjami równoważności na danym zbiorze a partycjami tego zbioru.

Fakt 9. Jeśli w skończonym częściowym porządku istnieje dokładnie jeden element maksymalny/minimalny, to jest on elementem największym/najmniejszym.

Fakt 10. W dobrym porządku nie ma nieskończonych ciągów malejących.

Fakt 11. Z Zasady Minimum wynika Zasada Indukcji Matematycznej:

$$[\varphi(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) (\varphi(n) \longrightarrow \varphi(n+1))] \longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \varphi(n).$$

Fakt 12. Niech $n \in \mathbb{N}$. Istnieje $n!$ bijekcji na zbiorze n elementowym.

Fakt 13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Zbiór n elementowy ma 2^n wszystkich podzbiorów.

Fakt 14. Jeśli f jest funkcją ze zbioru skończonego X w X , to f jest na X wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowa.

Fakt 15. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ oraz $k \leq n$. Zbiór n elementowy ma $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ wszystkich podzbiorów k elementowych.

Fakt 16. Skończone liniowe porządki tej samej mocy są izomorficzne.

Fakt 17. Dowolna rodzina parami rozłącznych nieskończonych odcinków na prostej jest przeliczalna.

Fakt 18. Zbiory $P(X)$ i $\{0, 1\}^X$ są równoliczne dla dowolnego zbioru X .

Fakt 19. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.

Fakt 20. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Fakt 21. $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$.

Fakt 22. $|(0, 1)| = |[0, 1]|$.

Fakt 23. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$.

Fakt 24. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Fakt 25. Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.